

Sten Lindström, institutionen för idé- och samhällsstudier, Umeå universitet

## Matematikens ontologi och kunskapsteori: En kritisk analys av den nyfregeanska riktningen i matematikens filosofi

Syftet med projektet är att kritiskt granska det program inom matematikens filosofi som går under benämningen nyfregeanism ("Neo-Fregeanism") och som utvecklats och diskuterats livligt under de senaste 20 åren. Programmets främsta företrädare är filosoferna Crispin Wright och Bob Hale, verksamma vid St. Andrews-universitetet i Skottland.

Nyfregeanerna menar att Frege i det stora hela hade rätt när han hävdade att: (i) matematiska påståenden, i vilken aritmetikens satser ingår, är objektivt sanna eller falska; (ii) dessa påståenden handlar om objektivt existerande abstrakta ting: tal, funktioner och klasser; samt (iii) de aritmetiska sanningarna är analytiska, i betydelsen att de kan bevisas vara sanna utifrån allmänna logiska lagar och principer som har sin grund i de ingående termernas mening. För att få dessa teser att gå ihop, måste Frege visa att de matematiska objekten är rent logiska till sin natur, dvs. att de kan definieras inom ramen för den av Frege själv utvecklade logiken. Frege menade alltså att aritmetiken, dvs. teorin för de naturliga talen 0,1, 2,.. kan reduceras till logik, dvs. att de aritmetiska grundbegreppen kan definieras i rent logiska termer och att aritmetikens grundantaganden (Peanos axiom) kan bevisas utifrån definitioner och allmänna logiska lagar.

### Freges logik och Russells paradox

Freges logik bestod av: (i) Axiom och härledningsregler för högre-ordningens predikatlogik, där individvariablerna antar objekt som värden medan variabler av högre ordning löper över "omättade" entiteter: funktioner och begrepp. (ii) Impredikativa abstraktionsprinciper för funktioner och begrepp. (iii) Freges Axiom V enligt vilket varje begrepp  $F$  är associerat med ett objekt,  $\text{ext}(F)$ , sådant att:

$$\text{ext}(F) = \text{ext}(G) \text{ om och endast för alla } x: Fx \text{ om och endast } Gx$$

$\text{ext}(F)$  kallas  $F$ 's extension och kan förstås som klassen av alla objekt som faller under  $F$

(i)-(iii) medför tillsammans att Freges system är motsägelsefullt (Russells paradox).

### Freges teorem

I *Grundgesetze* (1893) definierar Frege det kardinaltal,  $NxFx$ , som är associerat med ett begrepp  $F$  som klassen av alla klasser som är liktaliiga med (dvs. kan en-entydigt tillordnas)  $F$ 's extension. Utifrån denna definition bevisar han den s.k. Humes princip:

(HP)  $NxFx = NxGx$  omm  $F \text{ 1-1 } G$

där  $F \text{ 1-1 } G$  betyder att det finns en en-entydig tillordning mellan de objekt som faller under respektive  $F$  och  $G$ . HP säger alltså att två begrepp har samma kardinaltal om de är liktalliga.

När Frege väl har bevisat HP från axiom V, utvecklar han teorin ändliga kardinaltal (naturliga tal) enbart på basis av HP, och använder sig inte vidare av axiom V. Att man kan lägga HP till grund för aritmetiken finns redan antytt i Freges *Grundlagen* och har understrukits av Crispin Wright. Låt oss med Fregearitmetik mena den andra-ordningens teori som erhålls ur Freges system genom att man tar 'kardinalitet' i stället för 'extension' som ett primitivt begrepp och ersätter axiom V med HP. I Fregearitmetiken kan vi definiera 0, efterföljare, och naturligt tal, samt bevisa Peanos axiom för de naturliga talen. Detta resultat har visats på ett rigoröst sätt av Boolos som gett det namnet Freges teorem.

### **Fregeska abstraktionsprinciper**

Axiom V och HP är exempel på (Fregeska) abstraktionsprinciper, dvs. principer av formen:

$\$F = \$G$  omm  $F \text{ eq. } G$

där eq. är en ekvivalensrelation mellan begrepp och  $\$F$  och  $\$G$  är objekt som representerar "ekvivalensklasser" av begrepp m.a.p. relationen eq. En Fregesk abstraktionsprincip kan sägas postulera existensen av en avbildning  $\$$  från begrepp till objekt. Det intuitiva felet med axiom V kan sägas vara att det hävdar existensen av en en-entydig avbildning från begrepp till objekt: det skulle alltså finnas minst lika många objekt som det finns begrepp. Samtidigt leder systemets starka existensantaganden till att det måste finnas fler begrepp än det finns objekt.

Abstraktionsprinciper kan alltså vara utomordentligt kraftfulla, som HP, eller alltför kraftfulla, som Freges axiom V.

Wright och Hale menar att Freges teorem har stor filosofisk betydelse. De tänker sig nämligen att HP kan uppfattas som en implicit definition av begreppet kardinaltal, och därmed som analytiskt sann. Utifrån HP kan vi bevisa existensen av kardinaltal: Begreppet Planet kan en-entydigt korreleras med begreppet Planet (logisk sanning). Därav följer, medelst HP, att:  $NxPlanet(x) = NxPlanet(x)$ . Men detta kan inte vara sant om inte ' $NxPlanet(x)$ ' är en genuint refererande singular term. Det måste alltså finnas

tal. I likhet med Frege menar alltså Wright och Hale att det är analytiskt sant att det finns tal.

## Resultat

Mina slutsatser beträffande det nyfregeanska programmet är i det stora hela negativa. Jag kommer här att nämna tre invändningar som jag vill rikta mot programmet.

### INVÄNDNING 1

Nyfregeanismen kombinerar en form av logicism med platonism med avseende på tal. Man sluter sig från matematiska utsagors sanning till att det måste finnas objektivt existerande och välbestämda objekt (tal) som gör dessa utsagor sanna. Slutledningen ifråga är emellertid tvivelaktig. Matematiska påståenden kan inte skilja mellan isomorfa strukturer. Det förefaller således som om varje progression kan representera de naturliga talen. Matematiska termers referens kan därför förstås som obestämd: siffrorna '0', '1', '2', kan förstås som namn på elementen i vilken progression som helst.

Men kan man ändå inte sluta sig från aritmetikens sanning till den faktiska existensen (i en stark ontologisk mening) av matematiska strukturer som satisfierar Peanos axiom?

Även denna slutledning är tveksam. Det enda som krävs för att vi ska kunna tala om aritmetisk sanning är att Peanos axiom utgör ett koherent system, det vill säga att det är logiskt möjligt att det finns strukturer (progressioner) i vilka axiomen är sanna. Eftersom alla möjliga progressioner är isomorfa, gäller att en aritmetisk utsaga är sann om den är sann i varje logiskt möjlig progression. Det enda som krävs för att vi skall kunna tala om matematiks sanning är således att progressioner är möjliga, inte att de faktiskt existerar.

### INVÄNDNING 2

För att Freges definitioner av 0, efterföljare, och naturligt tal ska ha sin avsedda innebörd, måste andra-ordningens språk ges en standardtolkning. Speciellt måste (ett-ställiga) andra-ordningens variabler variera över ALLA begrepp (egenskaper, klasser) hos individer.

Betrakta till exempel Freges impredikativa definition av egenskapen att vara ett naturligt tal: Något är ett naturligt tal om det är ett element i varje klass  $F$  som innehåller 0 och som är sluten under efterföljaroperationen. Här måste 'alla' verkligen betyda ALLA, inte enbart alla klasser som är definierbara medelst formler in något givet språk. I annat fall är det inte uteslutet att icke-standard tal dyker upp bland det som skulle vara de "naturliga" talen. Det "kvasikombinatoriska" begreppet att vara en godtycklig delklass av en given domän förutsätts i standardtolkningen av andra-ordningens logik. Det är emellertid tveksamt om detta är ett logiskt snarare än ett matematiskt begrepp.

### INVÄNDNING 3

Vi övertygar oss om att olika axiomssystem är logiskt koherenta genom att föreställa oss intuitiva modeller, till exempel en godtycklig progression när det gäller aritmetiken, eller den kumulativa hierarkin när det gäller ZF mängdteori. En sådan struktur är ”uppbyggd nerifrån” medelst en rekursiv process och ger oss en åskådlig bild av ett tänkt matematiskt universum. Freges metod att implicit definiera matematiska objekt med hjälp av abstraktionsprinciper ger oss däremot ingen föreställning av det tänkta universumets uppbyggnad. Mycket riktigt visade sig Freges egen abstraktionsprincip (V) vara inkonsistent. Med tanke på detta har Freges metod att introducera matematiska entiteter med hjälp av abstraktion låg prima facie trovärdighet.

### Nya forskningsproblem

Man bör skilja mellan två olika problemställningar som sällan hålls isär: (i) Tolkningsproblemet: Hur kan vi tolka matematikens språk på ett sätt som förklarar matematiska utsagors sanning och objektivitet? (ii) Den ontologiska frågan: Är matematiska objekt verkliga? Det är min hypotes att den senare frågan är utomordentligt svår och att det bör vara möjligt att göra framsteg beträffande tolkningsfrågan utan att förutsätta ett svar på den ontologiska frågan. Vidare förefaller det som om logicismen innehåller en viktig insikt, nämligen att matematisk sanning är av begreppslig natur. Sanning i aritmetiken har sin grund i vårt begrepp om den naturliga talföljden (Dedekind). Mängdteoretisk sanning baserar sig på vårt (mer eller mindre bestämda) begrepp om den kumulativa hierarkin (Zermelo). Tanken att matematisk sanning är begreppslig är neutral i förhållande till de ontologiska positionerna platonism och nominalism. De bör också vara till hjälp när vi vill förklara hur matematisk kunskap är möjlig. Det huvudsakliga forskningsproblemet blir nu att försöka precisera en sådan konceptualistisk position och att bemöta invändningar.